DETERMINANTES FICHA 1

1) Se sabe que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

2) Indica si son ciertas o no las siguientes igualdades y razona las respuestas:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ a+2 & b+2 & c+2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & a^3 & a^4 \end{vmatrix} = 0$

3) Demuestra que: $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

4) Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} + 5 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

SOLUCIONES

1.- a) $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = (F_1) 3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = (C_3) 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -30$

hemos utilizado la propiedad que dice que si una línea entera está multiplicada por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

b) $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) = -6$ (misma propiedad)

c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{31} & -a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2+0 = -2$

aplicamos la propiedad de descomposición en suma y luego, el segundo determinante tiene dos filas proporcionales (segunda y tercera), luego es 0

2.- a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ a+2 & b+2 & c+2 \end{vmatrix}$ partimos del segundo determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ a+2 & b+2 & c+2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ a+2 & b+2 & c+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \\ a+2 & b+2 & c+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & a^3 & a^4 \end{vmatrix} = a \cdot a^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 \end{vmatrix} = 0$ (la segunda y tercera columnas son iguales)

3.- $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (F_1+F_2+F_3) \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$

en el primer paso a la primera fila le hemos sumado la segunda y la tercera

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \begin{matrix} =(C_2-C_1) \\ (C_3-C_1) \end{matrix} \ (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix} =$$

sacamos (a+b+c) factor común de la primera fila y luego le restamos la primera columna a las otras dos, con lo que tenemos una matriz triangular, cuyo determinante es la diagonal principal, es decir que:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)(-a-b-c)(-a-b-c) = (a+b+c)^3$$

4.- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} + 5 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} = x^2 + x \qquad \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 7$

nos queda, por tanto, la ecuación $x^2 + x + 5 = 7 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right.$